Déterminant circulant et suite de Polygones | Leçons : ~~144~~ 153, ~~152~~ 149, ~~155~~ 152, ~~153~~ 150, 223, 181, 191, 226

Réf : Gourdon

Définition : L'isobarycentre de $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ est $g = \dfrac{z_1 + \dots + z_n}{n}$

Théorème du déterminant circulant :

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \omega^{jk}$$

Preuve :

Soit $C = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_2 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$ et $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

On a $C = \sum_{k=1}^{n} a_k J^{k-1}$

On diagonalise C en diagonalisant J, soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

On résout $JX = \lambda X$ on a $\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases}$ d'où $x_i = \lambda^n x_i \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$

Alors $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\}$ sont valeurs propres de J

et $e^k = (1, \omega^k, \dots, \omega^{(n-1)k})$ est vecteur propre de J associé à ω^k

J possède donc n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.

Donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $J = PDP^{-1}$ où $D = \operatorname{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$

D'où $\det C = \det\left(\sum_{k=1}^{n} a_k J^{k-1}\right) = \det\left(P \sum_{k=0}^{n} a_k D^{k-1} P^{-1}\right)$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \omega^{jk}\right)$$

Proposition :

Soit P polygone dont les sommets sont $\{z_1, \dots, z_n\}$ on définit par récurrence $(P_k)_k$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k

Alors $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P

Preuve :

Soit P_k représenté par le vecteur $Z_k = \begin{bmatrix} z_1^k \\ \vdots \\ z_n^k \end{bmatrix}$

On a la relation de récurrence $Z_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{z_1^k + z_2^k}{2} \\ \vdots \\ \frac{z_n^k + z_1^k}{2} \end{bmatrix} = A Z_k$ où $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

D'où $Z_k = A^k Z_0$ où $Z_0 = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$

Les espaces dans lesquels nous travaillons sont de dimension finie donc toutes les normes sont équivalentes donc il suffit de prouver que $(A^k)_k$ converge pour n'importe quelle norme.

On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a_0 & & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & & a_0 \end{vmatrix}$ où $a_0 = X - \frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$

Or, par thm du déterminant circulant on a

$$\chi_A(X) = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk} = \prod_{j=0}^{n-1} X - \lambda_j \quad \text{où } \lambda_j = \frac{1+\omega^j}{2}$$

On a $\lambda_i = \lambda_j$ ssi $i = j$ donc χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable

Donc il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = QDQ^{-1}$ où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

où $|\lambda_j| = \left|\frac{1+\omega^j}{2}\right| = \left| e^{\frac{ij\pi}{n}} \frac{e^{\frac{ij\pi}{n}} + e^{-\frac{ij\pi}{n}}}{2} \right| = \left|\cos \frac{j\pi}{n}\right| < 1$

D'où $\lambda_j^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ pour $j \neq 0$

A^k converge alors vers $B = Q \operatorname{diag}(1, 0, \dots, 0) Q^{-1}$ par continuité du produit matriciel

Soit $X = BZ_0$ tel que $Z_k \to X$

Or on a $Z_{k+1} = AZ_k$ donc on a $X = AX$

Or l'espace propre associé à 1 contient $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ et est de dimension 1 car χ_A a n racines distinctes

D'où $\exists a \in \mathbb{C}$, $X = \begin{pmatrix}a\\ \vdots\\ a\end{pmatrix}$, c'est-à-dire que P_k converge vers a

Soit g_k l'isobarycentre de P_k qui vérifie :

$$g_{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^k + z_{i+1}^k}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^k = g_k$$

Donc g_k converge vers l'isobarycentre de ${}^t(a,\dots,a)$ qui est a

Algèbre, Gourdon (p746)